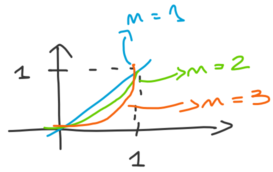
Lezione 5

giovedì 5 novembre 2020 18:03

CONVERGENZA PUNTUALE E UNIFORME PER SUCCESSIONI DI FUNZIONI

- $n \in \mathbb{N} \longrightarrow f_n : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f_n(x) = x^n \qquad 0 \le x \le 1$



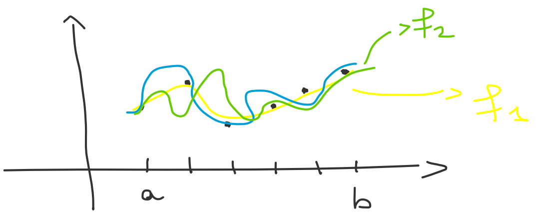
$$(f_n)_n \longrightarrow f_n : \underset{\substack{\parallel \\ (a,b)}}{I} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (I \in \mathbb{R}^N, \dots)$$

$\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{F}$

$n \longrightarrow f_n \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$. insieme di tutte le funzioni da (a,b) a valori in $\mathbb{R}$

- <u>Processo di approssimazione:</u>



$f_n \xrightarrow{?}$ converge al valore di una curva limite f

$(f_n)_n$ indica un processo di approssimazione, ovvero un algoritmo dipendente da un intero n che indica "la precisione" dell'approssimazione.

<u>DEFINIZIONE 1</u>: Convergenza puntuale in $x_0 \in (a,b)$, di una successione di funzioni con $f_n : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, significa che

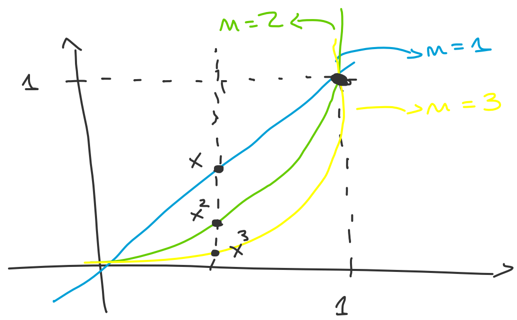
$$\exists \lim_{n \to +\infty} f_n(x_0) =: f(x_0)$$

($(f_n(x_0))_n$ successione di numeri reali)

In simboli $f_n \xrightarrow[x_0]{n\to+\infty} f$ (in x_0) se $(f_n)_n$ converge puntualmente $\forall x\in I$, allora scriveremo

$$f_n \xrightarrow[I]{n\to+\infty} f: I \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \left(f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$$

ES. $f_n(x) = x^n \qquad 0\le x\le 1 \qquad n\in\mathbb{N}$



$$f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{(n\to+\infty)} f \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & 0\le x<1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$$

$$f_n(1) = 1^n = 1 \ \forall n \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(1) = 1$$

$$f_n(x) = x^n \quad 0\le x<1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$$

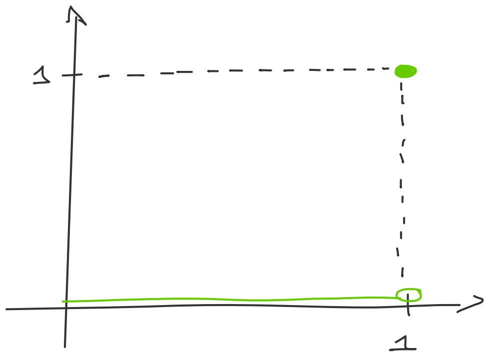


grafico funzione limite

OSSERVAZIONE: $f_n \xrightarrow[I]{} f$ se $\forall x\in I$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar n = \bar N(\varepsilon, x)\in\mathbb{N} : \forall n>\bar n \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\left(\sup_{x\in I} \bar n(\varepsilon, x) \in \mathbb{R}, \ \forall \varepsilon>0\right)$ ← in questo caso uso il sup $\bar n$ al posto di $\bar n$

2 $n(\varepsilon)$

DEFINIZIONE 2 Convergenza uniforme di $(f_n)_n$ in I. $\left(f_n \rightrightarrows f\right)$

Diremo che $(f_n)_n$, $f_n: I\to\mathbb{R}$, è uniformemente convergente in I se

$\forall x\in I$, $\forall\varepsilon>0 \ \exists \bar n = \bar n(\varepsilon)\in\mathbb{N} : \forall n>\bar n \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x\in I$

OSSERVAZIONE: $f_n \underset{I}{\rightrightarrows} f \implies f_n \xrightarrow[I]{} f$

Dimostrazione. osservare le definizioni in "$\varepsilon, \bar{n}$"

- Esistono successioni convergenti puntualmente ma non uniformemente

ES

$f_n(x) = x^n \qquad 0 \leq x \leq 1$

$f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{} f \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

Affermazione: $f_n \underset{[0,1]}{\not\rightrightarrows} f$

$\bar{n}(\varepsilon, x) = ? \qquad \forall \varepsilon > 0, \ \forall 0 \leq x \leq 1$

$x = 0, 1 \implies f_n(x) - f(x) = 0$ allora $\bar{n}(\varepsilon, x) = 1$ se $x = 0, 1 \} \ \forall \varepsilon > 0$

$\varepsilon \geq 1 \qquad \bar{n}(\varepsilon, x) = 1 \quad \forall x \in [0,1] \qquad |f_n(x) - f(x)| = x^n < 1$ se $0 \leq x < 1$

$0 \leq \varepsilon < 1, \quad 0 < x < 1$

$\bar{n}(\varepsilon, x) = ? \qquad x^n < \varepsilon \qquad \left(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon = |x^n - 0| = x^n \right)$

poiché $\xi \longrightarrow \log \xi$ monotona crescente

$\Downarrow$

conserva le disuguaglianze

$\overbrace{n \log x}^{<0} = \log(x^n) < \overbrace{\log \varepsilon}^{<0}$

$n > \dfrac{\log \varepsilon}{\log x} > 0 \longrightarrow \bar{n} = \left[\dfrac{\log \varepsilon}{\log x} \right] + 1 = \bar{n}(\varepsilon, x)$

monotona crescente

tende $\longrightarrow +\infty$

$\sup\limits_{0 \leq x \leq 1} \bar{n}(\varepsilon, x) \notin \mathbb{R} = +\infty$

$$\Downarrow$$

Quindi non c'è convergenza uniforme in $[0,1]$ delle $f_n(x) = x^n$ e $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

OSSERVAZIONE c'è convergenza uniforme di $f_n(x) = x^n$ e $f(x) \equiv 0$ in ogni $[0, \bar{x}]$, $0 < \bar{x} < 1$,

$$\sup_{x \in [0,1]} \bar{n}(\varepsilon, x) = \underbrace{\left[\frac{\log \varepsilon}{\log \bar{x}}\right]}_{\tilde{n}(\varepsilon)} + 1 \in \mathbb{N} \quad = \bar{n}(\varepsilon, x)$$

$$n > \tilde{n}(\varepsilon) \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| = x^n < \varepsilon$$